DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

1 9 8 0

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE FORMATION DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

M A T H E M A T I Q U E S

2ème épreuve

Durée : 4 heures

On rappelle que dans un espace métrique, une suite $\left(M_n\right)$ de points est dite convergente et de limite A si la suite réelle d $\left(A, M_n\right)$ où d $\left(A, M_n\right)$ est la distance de A à M_n , est convergente et a pour limite 0 .

- I -

E est un espace vectoriel réel, muni d'une norme N, et $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E, muni de la distance d, définie par :

$$d\ (A, B) = N\ (\overrightarrow{AB})$$

O est un point de $\mathcal{E}$. $\left(M_n\right)$et $\left(m_n\right)$ sont deux suites, l'une à valeurs dans $\mathcal{E}$, l'autre à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et telle que $m_1 \neq 0$, n décrivant l'ensemble des entiers strictement positifs. Enfin, $\left(\overrightarrow{U_n}\right)$ désigne une suite à valeurs dans E .

A tout entier n strictement positif, on associe le point P_n défini par :

$$(1)\quad \overrightarrow{OP_n} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k}}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k}$$

I - 1. Montrer que dans un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'une des normes usuelles, la convergence de la série de terme général N $\left(\overrightarrow{U_n}\right)$ entraîne celle de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{k=n} \overrightarrow{U_k}$$

Généraliser ce résultat au cas d'une norme quelconque.

../..

I - 2. Montrer que si la série de terme général m_n diverge, et si la suite de terme général M_n a pour limite le point A, alors, la suite de terme général P_n converge, et a pour limite A.

I - 3. Montrer que si la série de terme général m_n converge, et si la suite de terme général M_n a pour limite le point A, alors la suite de terme général P_n converge.

I - 4. Trouver les limites A et B des suites $\left(M_n\right)$ et $\left(P_n\right)$ dans le cas suivant

E est de dimension 2 et rapporté à la base $\vec{i}$, $\vec{j}$

$\overrightarrow{OM}_n = n\, a^n \vec{i} + n^2\, b^n \vec{j}$ où a et b sont des réels de modules strictement inférieurs à 1

$m_n = \frac{1}{n!}$

I - 5. Donner un exemple simple où la suite $\left(M_n\right)$ diverge et où la suite $\left(P_n\right)$ converge.

- II -

On considère maintenant E, un espace euclidien de dimension 3 rapporté à la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{E}$, un espace affine de direction E, muni d'un repère $(O\ \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$

Un paramètre t, désignant le temps, décrit $[o+\infty[$

Un point M, fonction de t, décrit une courbe (C). La fonction qui à t associe $\overrightarrow{OM}$ est de classe infinie sur $[o+\infty[$. Enfin, r est une fonction de t, strictement positive sauf peut-être en t = 0, définie sur $[o+\infty[$, de classe infinie.

On définit un point P par la relation :

$$(2)\quad \overrightarrow{OP}(t) = \frac{\int_o^t r(u)\, \overrightarrow{OM}(u)\, du}{\int_o^t r(u)\, du}, \quad \text{pour } t > 0$$

II - 1. Montrer que l'on peut prolonger la fonction P (t) en t = 0 par continuité, et que la fonction ainsi obtenue admet en t = 0 une dérivée à droite, que l'on déterminera.

On prendra soin de traiter aussi bien le cas : r (0) = 0 que les cas r (0) > 0.

II - 2. Montrer que si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} r(u)du$ diverge, et si le point M a une position limite A quand t tend vers l'infini, alors, le point P tend vers A quand t tend vers l'infini.

II - 3. Montrer que si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} r(u)du$ converge, et si le point M a une position limite A quand t tend vers l'infini, alors le point P a une position limite A' quand t tend vers l'infini.

- III -

Les données sont les mêmes que dans la partie II. On pourra poser :

$$\overrightarrow{OQ}(t) = \int_0^t r(u)\,\overrightarrow{OM}(u)\,du \qquad \text{et } \emptyset(t) = \int_0^t r(u)\,du$$

III - 1. Déterminer, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{PM}$ et de la fonction r(u) le vecteur vitesse du point P, $\forall\ t \in \mathbb{R}_+$

III - 2. Déterminer de même le vecteur accélération du point P, $\forall\ t \in \mathbb{R}_+^*$
Que se passe-t-il quand t = 0 ?

Déduire du résultat que le plan osculateur en P à la trajectoire de P contient M et le vecteur vitesse du point M.

III - 3. Dans cette dernière question,

$r(t) = 1$, et $\overrightarrow{OM}(t) = \cos t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j} + t\ \vec{k}$

En se limitant à l'intervalle d'étude : $t \in [0\ 4\pi]$, déterminer les équations de la trajectoire du point P en coordonnées cylindriques.

Construire les projections de la trajectoire de P sur les plans (x O y) et (x O z) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail